

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_mate-info$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = 3 + i$. Arătați că $z(z - 2i) = 10$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$. Arătați că $f(2x) - 2f(x) = -1$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 2} = x$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea A , a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A , numărul $n + 5$ să fie multiplu de 10.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 0)$ și $B(5, 4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul isoscel ABC , dreptunghic în A , cu aria egală cu 4. Arătați că $BC = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - y + az = 4 \\ ax + (a+1)y - 2z = a \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 8$.
- 5p** b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Pentru $a = -2$, arătați că $x_0 z_0 + y_0 = -2$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + (2^x - 2)(2^y - 2)$.
- 5p** a) Arătați că $2 \circ 3 = 18$.
- 5p** b) Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p** c) Demonstrați că $x \circ (-x) \leq 1$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x-1)(x+3)}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Arătați că $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 f(x)e^x dx = 18$.

- 5p** | **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \frac{e-2}{e}$.
- 5p** | **c)** Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z(z-2i)=(3+i)(3-i)=3^2-i^2=$ $=9+1=10$	3p 2p
2.	$f(2x)=10x+1$, pentru orice număr real x $f(2x)-2f(x)=10x+1-2(5x+1)=10x+1-10x-2=-1$, pentru orice număr real x	2p 3p
3.	$x^3-2x+2=x^3$, deci $-2x+2=0$ $x=1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea A sunt 9 numere n pentru care $n+5$ este multiplu de 10, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	2p 3p
5.	$m_{AB}=4$ și, cum $d \parallel AB$, obținem $m_d=4$ Ecuația dreptei este $y-0=4(x-0)$, adică $y=4x$	3p 2p
6.	$AD=\frac{BC}{2}$, unde AD este înălțime în triunghiul ABC $\mathcal{A}_{\triangle ABC}=\frac{AD \cdot BC}{2}=4$, de unde obținem $BC=4$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=$ $=4+2+0-0-0+2=8$	2p 3p
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{vmatrix}=-a^2+2a+8$, pentru orice număr real a $\det(A(a))=0 \Leftrightarrow a=-2$ sau $a=4$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$	2p 3p
c)	Pentru $a=-2$, soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(2, -2-2\alpha, \alpha)$, cu $\alpha \in \mathbb{C}$ $x_0 z_0 + y_0 = 2\alpha - 2 - 2\alpha = -2$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații	3p 2p
2.a)	$2 \circ 3 = 2 \cdot 3 + (2^2 - 2)(2^3 - 2) =$ $= 6 + 12 = 18$	3p 2p

b)	$x \circ 1 = x \cdot 1 + (2^x - 2)(2^1 - 2) = x + 0 = x$, pentru orice număr real x	2p
	$1 \circ x = 1 \cdot x + (2^1 - 2)(2^x - 2) = x + 0 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”	3p
c)	$x \circ (-x) = -x^2 + 1 - 2 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^{-x} + 4 =$	2p
	$= -x^2 + 1 - 2 \cdot \left(2^x - 2 + \frac{1}{2^x}\right) = 1 - x^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{2^x} - \frac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^2 \leq 1$, pentru orice număr real x	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 + 3(\ln(x+3) - \ln(x-1))' = 1 + \frac{3}{x+3} - \frac{3}{x-1} =$	3p
	$= \frac{x^2 + 2x - 3 + 3x - 3 - 3x - 9}{(x+3)(x-1)} = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x+3)(x-1)}, x \in (1, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \ln \frac{x+3}{x-1}\right) = 1$	2p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 \ln \frac{x+3}{x-1}\right) = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$; $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (1, 3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(1, 3]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [3, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3, +\infty)$, deci $f(x) \geq f(3)$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$	3p
	$f(3) = 3 + 3 \ln 3$, deci $x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1} \geq 3 + 3 \ln 3$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, de unde obținem $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$	2p
2.a)	$\int_0^3 f(x) e^x dx = \int_0^3 (x^2 + 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) \Big _0^3 =$	3p
	$= \frac{27}{3} + 9 = 18$	2p
b)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \int_0^1 x(-e^{-x})' dx = x(-e^{-x}) \Big _0^1 - e^{-x} \Big _0^1 =$	3p
	$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$	2p
c)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(t) dt \right)'}{(x^2)'} =$	2p
	$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)e^{-x}}{2} = 1$	3p

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 + 2i$ și $z_2 = 1 - i$. Arătați că $z_1^2 + 4z_2 = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care graficele funcțiilor f și g au exact un punct comun.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2 + 9) = 2\lg(x\sqrt{10})$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea A , a numerelor naturale de cel mult două cifre. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A , acesta să fie divizibil cu 9.
- 5p** 5. În triunghiul ABC , punctul M este mijlocul laturii AC , iar punctele D și E aparțin segmentului AB , astfel încât $AD = BE$. Arătați că $\overline{MD} + \overline{ME} = \overline{CB}$.
- 5p** 6. Determinați $x \in [0, \pi]$ pentru care $\sin 2x = 1 + \cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y + 2z = -2 \\ x + ay - z = 4 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p** c) Pentru $a = 1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi și $x_0 > y_0 > z_0$.
2. Pe mulțimea $M = [-1, 1]$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{xy}{1 + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
- 5p** b) Arătați că $x * (-x) \geq -x^2$, pentru orice $x \in M$.
- 5p** c) Determinați perechile (a, b) de numere din mulțimea M pentru care $a * b = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 - \ln(e^x + x^2)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{e^x + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Determinați imaginea funcției f .

2. Se consideră funcția $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x + 3}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^3 f(x) \sqrt{x + 3} dx = 12$.
- 5p b) Arătați că $\int_{-2}^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$.
- 5p c) Demonstrați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{\pi}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z_1^2 + 4z_2 = (1 + 2i)^2 + 4(1 - i) = 1 + 4i + 4i^2 + 4 - 4i =$ $= 5 + 4 \cdot (-1) = 5 - 4 = 1$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x + m - 1 = 0$ $\Delta = 0$ și, cum $\Delta = 8 - 4m$, obținem $8 - 4m = 0$, deci $m = 2$	2p 3p
3.	$\lg(x^2 + 9) = \lg(10x^2) \Rightarrow x^2 + 9 = 10x^2$, de unde obținem $x^2 - 1 = 0$ $x = -1$, care nu convine; $x = 1$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile Numerele din mulțimea A , divizibile cu 9, sunt $9 \cdot 0, 9 \cdot 1, 9 \cdot 2, \dots, 9 \cdot 11$, deci sunt 12 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$	2p 3p
5.	$\overline{MD} = \overline{MA} + \overline{AD}$ și $\overline{ME} = \overline{MC} + \overline{CB} + \overline{BE}$ $\overline{MD} + \overline{ME} = \overline{MA} + \overline{MC} + \overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CB} = \vec{0} + \vec{0} + \overline{CB} = \overline{CB}$	2p 3p
6.	$2 \sin x \cos x = 2 \cos^2 x \Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x - \cos x) = 0$ Cum $x \in [0, \pi]$, obținem $x = \frac{\pi}{2}$ sau $x = \frac{\pi}{4}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 0 =$ $= 0 - 2 + 4 - 0 - 1 - 0 = 1$	3p 2p
b)	$\det(A(a)) = (a - 1)^2$, pentru orice număr real a $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = 1$, deci sistemul are soluție unică pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	3p 2p
c)	Pentru $a = 1$, soluțiile sistemului de ecuații sunt $(\alpha, 2 - \alpha, -2)$, unde $\alpha \in \mathbb{C}$ Cum α este număr întreg și $\alpha > 2 - \alpha > -2$, obținem $\alpha = 2$ sau $\alpha = 3$, deci soluțiile sunt $(2, 0, -2)$ și $(3, -1, -2)$	2p 3p

2.a)	$1 * \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \sqrt{\left(1 - 1^2\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}} =$	3p
	$= \frac{\frac{1}{2}}{1 + \sqrt{0}} = \frac{1}{2}$	2p
b)	$x * (-x) = \frac{-x^2}{1 + 1 - x^2 } = \frac{-x^2}{2 - x^2}, \text{ pentru orice } x \in M$	3p
	$(x * (-x)) + x^2 = \frac{x^2(1 - x^2)}{2 - x^2} \geq 0, \text{ deci } x * (-x) \geq -x^2, \text{ pentru orice } x \in M$	2p
c)	$a * b = 1 \Rightarrow \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} = ab - 1, \text{ deci } ab \geq 1$	3p
	Cum $a, b \in M$, obținem $ab = 1$, deci perechile sunt $(-1, -1)$ și $(1, 1)$, care convin	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 - \frac{1}{e^x + x^2} \cdot (e^x + 2x) =$	3p
	$= \frac{x^2 - 2x}{e^x + x^2} = \frac{x(x - 2)}{e^x + x^2}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a) = 0$	3p
	$\frac{a(a - 2)}{e^a + a^2} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ sau } a = 2$	2p
c)	Pentru orice $x \in (-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, 0]$; pentru orice $x \in [0, 2]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[0, 2]$; pentru orice $x \in [2, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[2, +\infty)$	2p
	Cum f este continuă, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = -1$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, imaginea funcției f este $(-\infty, -1]$	3p
2.a)	$\int_0^3 f(x) \sqrt{x + 3} dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^3 =$	3p
	$= 9 + 3 = 12$	2p
b)	$\int_{-2}^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx = \int_{-2}^1 \frac{(x + 3)'}{\sqrt{x + 3}} dx = 2\sqrt{x + 3} \Big _{-2}^1 =$	3p
	$= 4 - 2 = 2$	2p
c)	$\frac{1}{f(x)} = \frac{\sqrt{x + 3}}{x^2 + 1} \leq \frac{2}{x^2 + 1}, \text{ pentru orice } x \in [0, 1], \text{ de unde obținem } \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx =$	3p
	$= 2 \arctg x \Big _0^1 = \frac{\pi}{2}$	2p

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianța 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(2-i)^2 + i(4+i) = 2$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x+3$. Determinați numărul real m pentru care $(f \circ f)(m) = 2m$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1} - 3 \cdot 5^x = 10$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mari sau egale cu 7.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(3,-2)$ și $C(2a,a)$, unde a este număr real nenul. Arătați că dreptele AB și OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a .
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin x + 4 \cos \frac{x}{3} \sin \frac{2x}{3}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & 2a \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax - y + 2az = 0 \\ x - 2y + az = 0 \\ x + y + (1-a)z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p** c) Pentru $a = -1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 y^2 - 4(x+y)^2 + 1$.
- 5p** a) Arătați că $0 * 1 = -3$.
- 5p** b) Arătați că $x * (-1) \leq 2x$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale nenule, cu $m \leq n$, pentru care $m * n = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{5} - \ln(x^2 + x + 5)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 - 9x}{5(x^2 + x + 5)}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică.
2. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x}{x^3 + 8}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 (x^3 + 8) f(x) dx = 8$.

- 5p** | **b)** Arătați că $\int_1^4 x f(x) dx = 4 \ln 2$.
- 5p** | **c)** Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} \int_0^x t \cdot f(t) dt \right)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(2-i)^2 + i(4+i) = 4 - 4i + i^2 + 4i + i^2 = 4 - 1 - 1 = 2$	3p 2p
2.	$(f \circ f)(m) = m + 6$, pentru orice număr real m $m + 6 = 2m$, de unde obținem $m = 6$	3p 2p
3.	$5 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^x = 10$, deci $2 \cdot 5^x = 10$, de unde obținem $5^x = 5$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Deoarece cifrele pot fi 7, 8 și 9, sunt $3 \cdot 3 = 9$ numere naturale de două cifre care au cifrele mai mari sau egale cu 7, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 3p
5.	$m_{AB} = -2$ $m_{OC} = \frac{1}{2}$, pentru orice număr real nenul a și, cum $m_{AB} \cdot m_{OC} = (-2) \cdot \frac{1}{2} = -1$, obținem că dreptele AB și OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a	2p 3p
6.	$\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 4 \cdot \frac{3}{4} = 4$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - (-1) = 1$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & -1 & 2a \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix} = (a+1)^2$, pentru orice număr real a $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = -1$, deci sistemul de ecuații are soluție unică dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	2p 3p
c)	Pentru $a = -1$, soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(-\alpha, -\alpha, \alpha)$, cu $\alpha \in \mathbb{C}$ $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3\alpha^2$, deci $3\alpha^2 = 3$, de unde obținem $\alpha = -1$ sau $\alpha = 1$, deci soluțiile sunt $(1, 1, -1)$ și $(-1, -1, 1)$	2p 3p

2.a)	$0 * 1 = 0^2 \cdot 1^2 - 4(0+1)^2 + 1 =$ $= 0 - 4 + 1 = -3$	3p 2p
b)	$x * (-1) = -3x^2 + 8x - 3 =$ $= -3x^2 + 6x - 3 + 2x = -3(x-1)^2 + 2x \leq 2x$, pentru orice număr real x	2p 3p
c)	$m^2 n^2 - 4(m+n)^2 + 1 = 1$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, obținem $mn - 2m - 2n = 0$ $(m-2)(n-2) = 4$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, cu $m \leq n$, perechile sunt $(3,6)$ și $(4,4)$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{2x+1}{x^2+x+5} =$ $= \frac{x^2+x+5-10x-5}{5(x^2+x+5)} = \frac{x^2-9x}{5(x^2+x+5)}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a) = 0$ $a^2 - 9a = 0$, de unde obținem $a = 0$ sau $a = 9$	3p 2p
c)	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty, 0]$; $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [0, 9] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0, 9]$, deci $f(x) \leq f(0)$, pentru orice $x \in (-\infty, 9]$ $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (9, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(9, +\infty)$ și, cum $f(0) = -\ln 5 < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă, obținem că ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică	2p 3p
2.a)	$\int_0^2 (x^3 + 8) f(x) dx = \int_0^2 4x dx = 2x^2 \Big _0^2 =$ $= 8 - 0 = 8$	3p 2p
b)	$\int_1^4 x f(x) dx = \int_1^4 \frac{4x^2}{x^3 + 8} dx = \frac{4}{3} \int_1^4 \frac{(x^3 + 8)'}{x^3 + 8} dx = \frac{4}{3} \cdot \ln(x^3 + 8) \Big _1^4 =$ $= \frac{4}{3} \ln 8 = 4 \ln 2$	3p 2p
c)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} \int_0^x t \cdot f(t) dt \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x t \cdot f(t) dt \right)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x)}{3x^2} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3(x^3 + 8)} = \frac{1}{6}$	3p 2p